Colles de Maths - semaine 13
Lycée Aux Lazaristes

Julien Allasia - ENS de Lyon

Questions de cours

— Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$

— Formule de Taylor

— PGCD, PPCM

— Caractérisation de l'ordre de multiplicité d'un zéro

— Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$

— Interpolation de Lagrange (existence et unicité du polynôme de degré $n-1$ vérifiant $\forall 1 \leq i \leq n, P(x_i) = y_i$

Exercice 1 Soit $n \geq 1$.

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant
$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta).$$
2. Déterminer le degré et le coefficient dominant de T_n
3. Décomposer T_n sous forme irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$.

Exercice 2 On pose les polynômes $T_0 = 1$ et $T_1 = X$, ainsi que, pour $n \in \mathbb{N}$,
$$T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

1. Déterminer le degré et le coefficient dominant de T_n.
2. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.
3. En déduire que T_n est l'unique polynôme vérifiant pour tout réel θ l'égalité $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.
4. Décomposer T_n sous forme irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 3 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non constant unitaire.
Montrer que P est scindé sur $\mathbb{R}$ si et seulement si
$$\forall z \in \mathbb{C},\ |P(z)| \geq |\Im(z)|^{\deg P}.$$

Exercice 4 Soit $a_0, ..., a_{n-1} \in \mathbb{C}$ et $P = X^n + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.
Montrer que les racines complexes de P ont un module majoré par $\max\left(1, \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\right)$ et par $1 + \displaystyle\max_{1\leq k\leq n-1} |a_k|$.

Exercice 5 Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que P' divise P.

Exercice 6 Soit $A \in \mathbb{R}[X]$. Montrer l'équivalence entre les deux points suivants :
(i) Pour tout réel x, $A(x) \geq 0$.
(ii) Il existe $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que $A = P^2 + Q^2$.

Exercice 7 Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Factoriser le polynôme $(X+1)^n - e^{2i\alpha}(X-1)^n$ dans $\mathbb{C}$.

Exercice 8 Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que $P(X) - X$ divise $P(P(X)) - X$.

Exercice 9 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$, a un réel non nul.
Montrer que $P' + aP$ est aussi scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10 Trouver les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(0) = 0$ et $P(X^2+1) = P(X)^2 + 1$.